<u>Exercice 1</u> : équation différentielle et fonction exponentielle

Partie A

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + y = e^{-x}$.

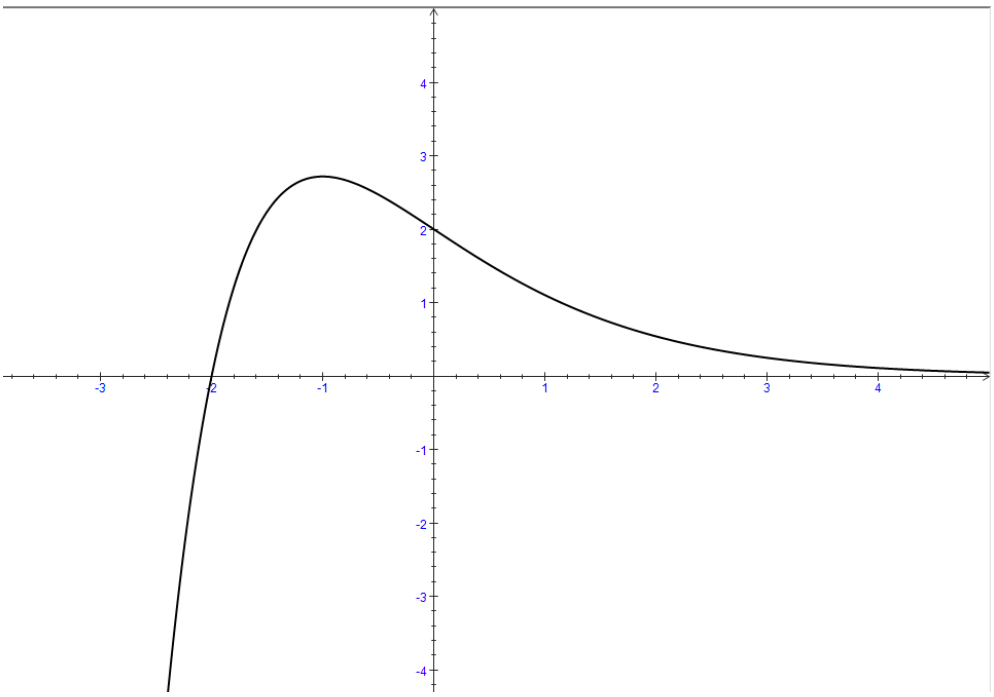
1) Démontrer que la fonction u définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ par $u(x) = xe^{-x}$ est une solution de (E).
2) Résoudre l'équation différentielle (E_0) : $y' + y = 0$.
3) Démontrer qu'une fonction v, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, est solution de (E) si, et seulement si, v – u est solution de (E_0).
4) En déduire toutes les solutions de (E).
5) Déterminer la fonction f_2 solution de (E), qui prend la valeur 2 en 0.

Partie B

k étant un nombre réel donné, on note f_k la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ par $f_k(x) = (x + k)e^{-x}$.

On note $\mathscr{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

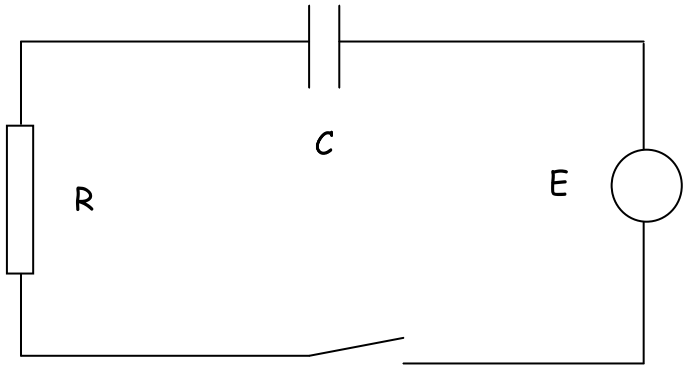
1) Déterminer les limites de f_k en $-\infty$ et $+\infty$.
2) Calculer $f'_k(x)$ pour tout x réel.
3) En déduire le tableau de variations de f_k.
4) Le graphique ci-dessous représente une courbe $\mathscr{C}_k$ qui est la représentation d'une fonction f_k.



A l'aide des renseignements donnés par le graphique, déterminer la valeur du nombre réel k correspondant.

Exercice 2 : charge d'un condensateur

On considère le montage électrique représenté par le schéma ci-dessous :



Le condensateur de capacité $C = 4\times10^{-4}$ F (farads) est monté en série avec un générateur dont la tension aux bornes est E = 6 V et un conducteur ohmique de résistance R = 88 Ω (ohms).
A l'instant initial le condensateur est déchargé et la tension est nulle à ses bornes.
On ferme le circuit, et on s'intéresse à l'évolution de la tension u_c aux bornes du condensateur.
D'après la loi d'Ohm et la loi d'addition des tensions, la tension u_c aux bornes du condensateur vérifie l'équation différentielle :

$$E = R\times C\times\frac{du_c}{dt} + u_c.$$

où t est le temps en secondes.

1) Ecrire une l'équation sous la forme y' = ay + b.
2) Résoudre cette équation en tenant compte des conditions initiales.
3) Donner la valeur de u_c au bout de 100 ms.

Exercice 3 : Etude de calculs de Daniel Bernoulli
Au XVIII^e siècle, Daniel Bernoulli étudie l'impact de la variole sur une population initiale S(0).
A un instant donné t, il considère que le nombre S(t) de personnes non décédées (fourni par les tables de mortalité) et le nombre M(t) des personnes susceptibles d'avoir la variole.
En utilisant les hypothèses de Bernoulli et en supposant que le nombre de décès pour d'autres causes que la variole est, à un instant donné, proportionnel (coefficient k(t) à la population concernée), on admettra que l'on peut modéliser la situation par les deux équations suivantes :

$$S'(t) = -\frac{1}{64}M(t) - k(t)S(t) \text{ et } M'(t) = -\frac{1}{8}M(t) - k(t)M(t), \text{ avec } S(0) = M(0)$$

1) On considère la fonction f telle que $f(t) = \frac{M(t)}{S(t)}$. Que représente f(t) ?

Démontrer que $f'(t) = -\frac{1}{8}f(t) + \frac{1}{64}[f(t)]^2$ et $f(0) = 1$.

2) On considère la fonction g telle que, $g(t) = \frac{1}{f(t)}$.

   Démontrer que $g'(t) = \frac{1}{8}\times g(t) - \frac{1}{64}$ et $g(0) = 1$.

   En déduire les expressions de g(t) puis de f(t).

3) On trouve dans l'ouvrage de Bernoulli, une table dont on peut extraire le tableau suivant.

   Vérifier la pertinence de la modélisation proposée.

Année : t	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Survivants : S(t)	1300	1000	855	798	760	732	710	692	680
Susceptibles d'avoir la variole : M(t)	1300	896	685	571	485	416	359	311	271

t	9	10	11	12	13	14	15	16	17
S(t)	670	661	653	646	640	634	628	622	616
M(t)	237	208	182	160	140	123	108	94	83

Exercice 4 : Méthode d'Euler

On considère l'équation différentielle (E) :

$y' = 3y(1 - y)$ avec $y(0) = 2$.

En utilisant la méthode itérative d'Euler avec un pas égal à 0,01, représenter dans un tableur une approximation de la courbe représentant la fonction f solution de (E) sur l'intervalle [0 ;1].

CORRECTION

<u>Exercice 1</u> : équation différentielle et fonction exponentielle

Partie A

1) $u'(x) = e^{-x} - xe^{-x}$

   $u'(x) + u(x) = e^{-x} - xe^{-x} + xe^{-x} = e^{-x}$

   Donc u est bien solution de l'équation (E).

2) Les solutions de (E_0) sont de la forme $y = ke^{-x}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

3) v solution de (E) $\Leftrightarrow v' + v = e^{-x}$

   $\Leftrightarrow (v - u)' + (v - u) = 0$ car $u'(x) - u(x) = e^{-x}$

   $\Leftrightarrow v - u$ solution de (E_0).

4) On déduit de la question précédente que les solutions de (E) sont de la forme :

   $y - u(x) = ke^{-x}$

   Soit $y = xe^{-x} + ke^{-x} = (x + k)e^{-x}$

5) On a $f_2(x) = (x + k)e^{-x}$ et $f_2(0) = 2$

   D'où : $0 + k = 2 \Rightarrow k = 2$

   Donc $f_2(x) = (x + 2)e^{-x}$

Partie B

1) $\lim\limits_{x \to -\infty} f_k(x) = -\infty$ car $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$

   $\lim\limits_{x \to +\infty} f_k(x) = 0$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^{x}} = 0$

2) Pour tout x réel, $f_k'(x) = e^{-x} - (x + k)e^{-x} = (1 - x - k)e^{-x}$

3) Tableau de variations de f_k.

x	$-\infty$		$1 - k$		$+\infty$
f'		+		-	
f(x)	$-\infty$	$\nearrow$	M	$\searrow$	0

   $M = f_k(1 - k) = (1 - k + k)e^{k-1} = e^{k-1}$

4) $f_k(x) = 0 \Rightarrow x = -k = -2 \Rightarrow k = 2$

   On vérifie de plus que le maximum de f_k est atteint en $-1 = 1 - k = 1 - 2$.

CORRECTION

Exercice 2 : charge d'un condensateur

1) On pose $y = u_C$.

L'équation différentielle s'écrit alors : $E = RCy' + y$

Ou : $RCy' = -y + E$

Ou : $y' = -\frac{1}{RC}y + \frac{E}{RC}$

De la forme $y' = ay + b$ avec $a = -\frac{1}{RC}$ et $b = \frac{E}{RC}$

2) Les solutions générales de l'équation $y' = ay + b$ sont de la forme :

$$y = Ce^{at} - \frac{b}{a} \text{ avec } C \in \mathbb{R}$$

Pour $t = 0$ on a $y(0) = 0 \Rightarrow 0 = C - \frac{b}{a} \Rightarrow C = \frac{b}{a}$

Soit $y = \frac{b}{a}(e^{at} - 1)$

$\frac{b}{a} = -E$

On a donc $u_C(t) = E\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)\right)$.

3) Pout $t = 100$ ms $= 100\times10^{-3}$ s $= 0,1$ s

$u_C(0,1) = 6\times\left(1 - \exp\left(-\frac{0,1}{88\times4\times10^{-4}}\right)\right) = 6\times\left(1 - \exp\left(-\frac{1000}{88\times4}\right)\right) = 6\times\left(1 - \exp\left(-\frac{125}{44}\right)\right) \approx 5,65$ V

Exercice 3 : Etude de calculs de Daniel Bernoulli

1) f(t) représente le pourcentage de personnes susceptibles d'avoir la variole parmi les personnes non décédées à un instant t.

$$f'(t) = \frac{M'(t)\times S(t) - M(t)\times S'(t)}{[S(t)]^2}$$

$$f'(t) = \frac{1}{[S(t)]^2}\times\left[\left(-\frac{1}{8}M(t) - k(t)M(t)\right)\times S(t) - M(t)\times\left(-\frac{1}{64}M(t) - k(t)S(t)\right)\right]$$

$$f'(t) = \frac{1}{[S(t)]^2}\times\left(-\frac{1}{8}M(t)S(t) - k(t)M(t)S(t) + \frac{1}{64}(M(t))^2 + M(t)k(t)S(t)\right)$$

$$f'(t) = -\frac{1}{8}\times\frac{1}{[S(t)]^2}\times M(t)\times S(t) + \frac{1}{64}\times\frac{1}{[S(t)]^2}\times[M(t)]^2$$

$$f'(t) = -\frac{1}{8}\times\frac{M(t)}{S(t)} + \frac{1}{64}\times\left(\frac{M(t)}{S(t)}\right)^2$$

$$f'(t) = -\frac{1}{8}f(t) + \frac{1}{64}[f(t)]^2$$

$f(0) = \frac{M(0)}{S(0)} = 1$ car $M(0) = S(0)$

CORRECTION

2) $g'(t) = -\dfrac{f'(t)}{[f(t)]^2} = -\dfrac{1}{[f(t)]^2}\times\left(-\dfrac{1}{8}f(t) + \dfrac{1}{64}[f(t)]^2\right)$

$g'(t) = \dfrac{1}{8}\times\dfrac{1}{f(t)} - \dfrac{1}{64}$

$g'(t) = \dfrac{1}{8}g(t) - \dfrac{1}{64}$

$g(0) = \dfrac{1}{f(0)} = 1$ car $f(0) = 1$

Les solutions générales de l'équation $g'(t) = \dfrac{1}{8}g(t) - \dfrac{1}{64}$ sont :

$g(t) = C\times\exp\left(\dfrac{1}{8}t\right) + \dfrac{1}{64}\times 8 = C\times\exp\left(\dfrac{1}{8}t\right) + \dfrac{1}{8}$

$g(0) = 1 \Rightarrow C + \dfrac{1}{8} = 1 \Rightarrow C = \dfrac{7}{8}$

D'où $g(t) = -7\times\exp\left(\dfrac{t}{8}\right) + 8$

Et $f(t) = \dfrac{1}{g(t)} = \dfrac{1}{9\times\exp\left(\dfrac{t}{8}\right) - 8}$

3) On compare avec excel le rapport $S(t)/M(t)$ avec les valeurs de $g(t)$

Année : t	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Survivants : S(t)	1300	1000	855	798	760	732	710	692	680
Susceptibles d'avoir la variole : M(t)	1300	896	685	571	485	416	359	311	271
S(t)/M(t)	1	1,1161	1,2482	1,3975	1,5670	1,7596	1,9777	2,2251	2,5092
g(t)	1	1,1165	1,2485	1,3981	1,5676	1,7597	1,9774	2,2240	2,5035
Ecart relatif entre les relevés et le modèle mathématique	0,000%	0,039%	0,028%	0,041%	0,040%	0,006%	0,017%	0,048%	0,229%

9	10	11	12	13	14	15	16	17
670	661	653	646	640	634	628	622	616
237	208	182	160	140	123	108	94	83
2,8270	3,1779	3,5879	4,0375	4,5714	5,1545	5,8148	6,6170	7,4217
2,8202	3,1791	3,5857	4,0465	4,5686	5,1603	5,8307	6,5904	7,4513
0,242%	0,037%	0,062%	0,222%	0,062%	0,113%	0,273%	0,404%	0,397%

L'écart maximal (en valeur absolue) est d'environ 0,404 % ce qui est très faible.
La modélisation mathématique proposée par Bernoulli était donc excellente.

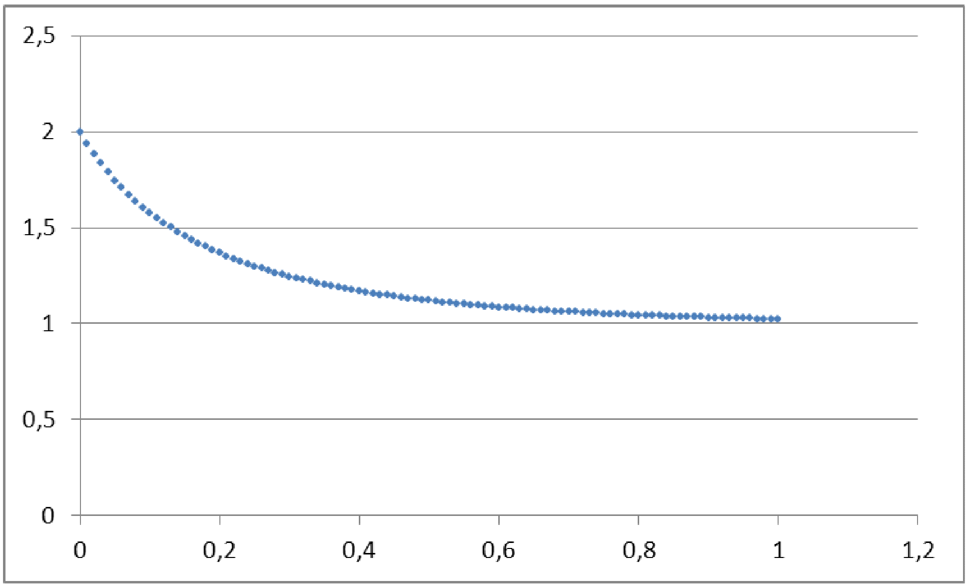
Exercice 4 : Méthode d'Euler

On utilise la suite (x_n) définie par $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = x_n + h$ (h étant le pas)
On utilise l'approximation affine de f en x_n :
$f(x_n + h) = f(x_n) + hf'(x_n) = f(x_n) + h\times 3f(x_n)(1 - f(x_n))$
On construit ainsi une suite récurrente (y_n) définie par :
$y_{n+1} = y_n(1 + 3h(1 - y_n))$ et $y_0 = 2$
Les points de coordonnées $(x_n;y_n)$ pour n = 0 à 100 définisse une approximation de la courbe représentant f.

	A	B	C	D	E	F
1	x	y	3y(1 - y)		pas	0,01
2	0	2	-6	2		
3	0,01	1,94	-5,4708	1,94258785		
4	0,02	1,885292	-5,00710178	1,88993855		
5	0,03	1,83522098	-4,59844521	1,84150394		
6	0,04	1,78923653	-4,23639249	1,79681675		
7	0,05	1,74687261	-3,91407388	1,75547617		
8	0,06	1,70773187	-3,62584878	1,71713647		
9	0,07	1,67147338	-3,36704963	1,68149782		
10	0,08	1,63780288	-3,1337862	1,64829893		
11	0,09	1,60646502	-2,92279452	1,61731104		
12	0,1	1,57723708	-2,73131915	1,58833302		
13	0,11	1,54992388	-2,55702048	1,5611873		
14	0,12	1,52435368	-2,39790138	1,53571654		
15	0,13	1,50037466	-2,25224841	1,51178079		

Formule en A3 : = A2 + F1 (recopiée vers le bas)
Formule en B3 : = B2 + F1*C2 (recopiée vers le bas)
Formule en C2 : = 3*B2*(1 – B2) (recopiée vers le bas)

CORRECTION



<u>Remarque</u> :
En faisant le changement de variable Y = 1/y, on peut montrer que la solution exacte de l'équation différentielle y' = 3y(1 – y) est :

$y(x) = \dfrac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-3x}}$ et on peut comparer la courbe exacte avec la courbe approchée par la méthode d'Euler (exemple : avec un pas de 0,08).