Exercice 1 : /3

T est la transformation du plan d'écriture complexe $z' = 2iz + 3$. Soit A, B et C les points d'affixe respectives i, 2 et $1 - i$.

1) Déterminer les affixes des points A', B' et C' images de A, B et C par T.
2) Déterminer l'affixe du point D tel que T(D) = A.
3) Démontrer que $\frac{A'B'}{A'C'} = \frac{AB}{AC}$.
4) Calculer les angles $(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{A'B'})$ et $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{A'C'})$. Que remarque-t-on ?

Exercice 2 : /2

A et B sont deux points du plan.

$\mathcal{D}$ est une droite du plan, s est la symétrie axiale d'axe $\mathcal{D}$, t est la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$, h est l'homothétie de centre A et de rapport -3.

r est la rotation de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

Justifier que les composées suivantes sont des similitudes et préciser leur rapport :

a) $s_1 = t \circ h$; b) $s_2 = h \circ s$

c) $s_3 = t \circ h^{-1} \circ r$; d) $s_4 = r \circ t$.

Exercice 3 : /5

Dans le plan orienté on considère un carré ABCD tel que l'angle $(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}$. On désigne par I et K les milieux respectifs des segments [AC] et [CD]. Représenter ces points sur une figure.

On se propose d'étudier la similitude directe S telle que S(A) = I et S(C) = K.

Le plan est rapporté au repère orthonormal direct $(A ; \overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AD})$.

1) Donner les affixes des points A, C, I et K.
2) Montrer que l'écriture complexe de S est $z' = \frac{1 + i}{4}z + \frac{1 + i}{2}$
3) Déterminer les éléments caractéristiques de S (centre Ω, rapport et angle).
4) Que peut-on dire des triangles $A\Omega I$ et $C\Omega K$?

Exercice 1 : /3

S est la transformation du plan d'écriture complexe $z' = 3iz - 4$. Soit A, B et C les points d'affixe respectives i, 2 et $1 - i$.

1) Déterminer les affixes des points A', B' et C' images de A, B et C par S.
2) Déterminer l'affixe du point D tel que S(D) = A.
3) Démontrer que $\frac{A'B'}{A'C'} = \frac{AB}{AC}$.
4) Calculer les angles $(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{A'B'})$ et $(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{A'C'})$. Que remarque-t-on ?

Exercice 2 : /2

A et B sont deux points du plan.

$\mathcal{D}$ est une droite du plan, s est la symétrie axiale d'axe $\mathcal{D}$, t est la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$, h est l'homothétie de centre A et de rapport -4.

r est la rotation de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

Justifier que les composées suivantes sont des similitudes et préciser leur rapport :

a) $s_1 = s \circ r$; b) $s_2 = h \circ h$

c) $s_3 = r \circ h^{-1} \circ s$; d) $s_4 = t \circ r$.

Exercice 3 : /5

Dans le plan orienté on considère un carré ABCD tel que l'angle $(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}$. On désigne par I et K les milieux respectifs des segments [AC] et [BC]. Représenter ces points sur une figure.

On se propose d'étudier la similitude directe S telle que S(A) = I et S(C) = K.

Le plan est rapporté au repère orthonormal direct $(A\,;\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD})$.

1) Donner les affixes des points A, C, I et K.
2) Montrer que l'écriture complexe de S est $z' = \frac{1 - i}{4}z + \frac{1 + i}{2}$
3) Déterminer les éléments caractéristiques de S (centre Ω, rapport et angle).
4) Que peut-on dire des triangles $A\Omega I$ et $C\Omega K$?

CORRECTION

Exercice 1 : /3

T est la transformation du plan d'écriture complexe $z' = 2iz + 3$. Soit A, B et C les points d'affixe respectives i, 2 et 1 – i.

1) Déterminer les affixes des points A', B' et C' images de A, B et C par T.
2) Déterminer l'affixe du point D tel que T(D) = A.
3) Démontrer que $\frac{A'B'}{A'C'} = \frac{AB}{AC}$.
4) Calculer les angles $(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{A'B'})$ et $(\overrightarrow{AC} , \overrightarrow{A'C'})$. Que remarque-t-on ?

1) $z_{A'} = 2i \times i + 3 = -2 + 3 = 1$

$z_{B'} = 2i \times 2 + 3 = 3 + 4i$

$z_{C'} = 2i(1 - i) + 3 = 2i - 2i^2 + 3 = 5 + 2i$

2) On résout l'équation $z' = z_A$

Soit : $2iz + 3 = i \Rightarrow 2iz = i - 3 \Rightarrow z = \frac{i-3}{2i} = \frac{-1-3i}{-2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$

D a pour affixe $\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$.

3) $A'B' = |z_{B'} - z_{A'}| = |3 + 4i - 1| = |2 + 4i| = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$A'C' = |z_{C'} - z_{A'}| = |5 + 2i - 1| = |4 + 2i| = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$

$AB = |z_B - z_A| = |2 - i| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$

$AC = |z_C - z_A| = |1 - i - i| = |1 - 2i| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$

On vérifie que $\frac{A'B'}{A'C'} = \frac{AB}{AC} = 1$.

4) $(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{A'B'}) = \arg\left(\frac{z_{B'} - z_{A'}}{z_B - z_A}\right)$

$\frac{z_{B'} - z_{A'}}{z_B - z_A} = \frac{2+4i}{2-i} = 2\frac{1+2i}{2-i} = 2\frac{(1+2i)(2+i)}{5} = \frac{2}{5}(2 + i + 4i - 2) = 2i$

$\arg(2i) = \frac{\pi}{2}$

Donc $(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{A'B'}) = \frac{\pi}{2}$

$(\overrightarrow{AC} ; \overrightarrow{A'C'}) = \arg\left(\frac{z_{C'} - z_{A'}}{z_C - z_A}\right)$

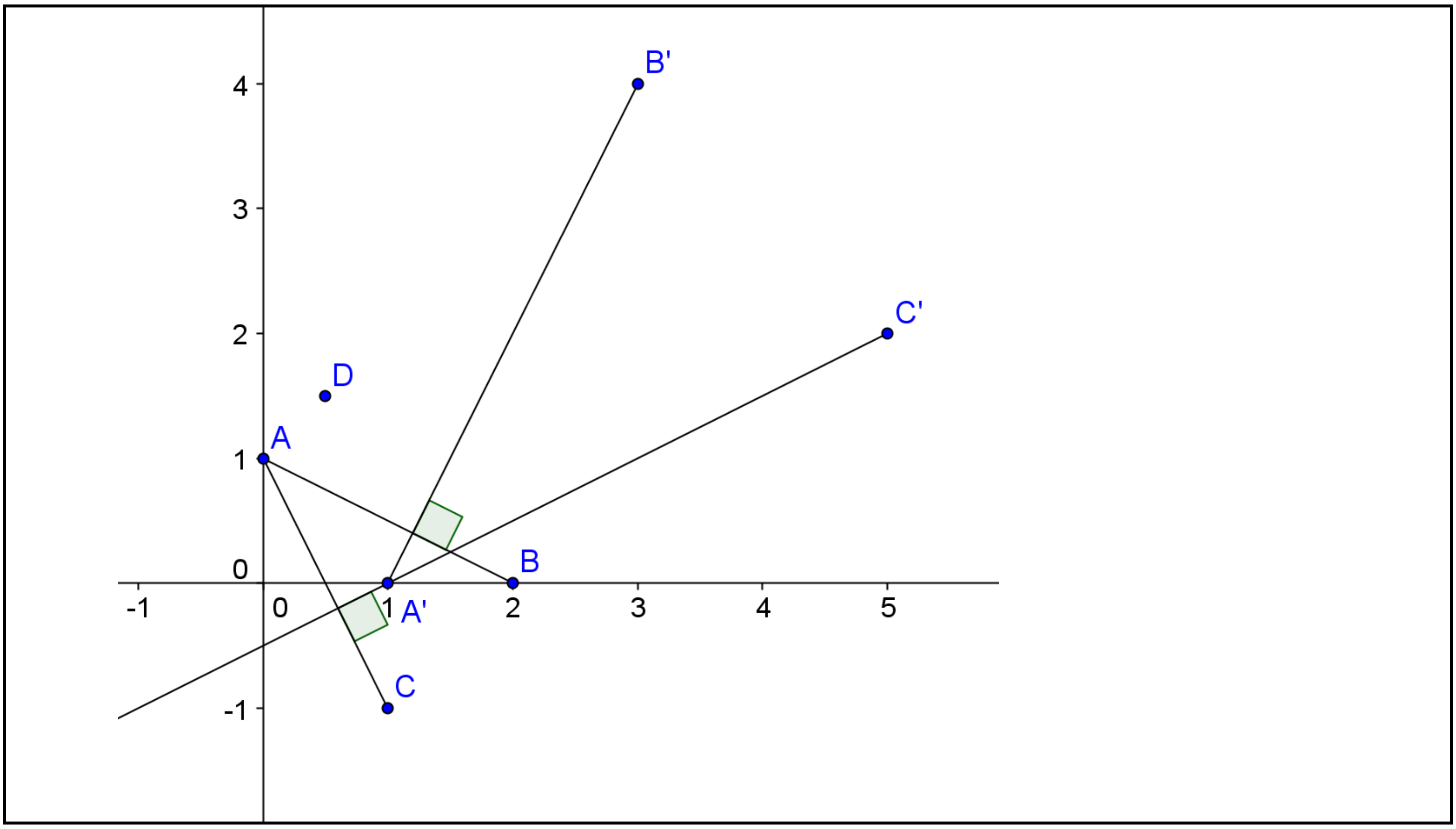
$\frac{z_{C'} - z_{A'}}{z_C - z_A} = \frac{4+2i}{1-2i} = 2\frac{2+i}{1-2i} = 2\frac{(2+i)(1+2i)}{5} = \frac{2}{5}(2 + 4i + i - 2) = 2i$

$\arg(2i) = \frac{\pi}{2}$

Donc $(\overrightarrow{AC} ; \overrightarrow{A'C'}) = \frac{\pi}{2}$

On remarque que $(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{A'B'}) = (\overrightarrow{AC} ; \overrightarrow{A'C'})$.

CORRECTION



Exercice 2 : /2

A et B sont deux points du plan.

$\mathcal{D}$ est une droite du plan, s est la symétrie axiale d'axe $\mathcal{D}$, t est la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$, h est l'homothétie de centre A et de rapport -3.

r est la rotation de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

Justifier que les composées suivantes sont des similitudes et préciser leur rapport :

a) $s_1 = s \circ h$; b) $s_2 = h \circ r$

c) $s_3 = t \circ h^{-1} \circ s$; d) $s_4 = t \circ r$.

a) s_1 est une composée de similitudes de rapports respectifs 1 et 3, donc s_1 est une similitude de rapport $1\times 3 = 3$.

b) s_2 est une composée de similitudes de rapports respectifs 3 et 1, donc s_2 est une similitude de rapport $3\times 1 = 3$.

c) s_3 est une composée de similitudes de rapports respectifs 1, $\frac{1}{3}$ et 1, donc s_3 est une similitude de rapport $1\times\frac{1}{3}\times 1 = \frac{1}{3}$.

d) s_4 est une composée de similitudes de rapports respectifs 1 et 1, donc s_4 est une similitude de rapport $1\times 1 = 1$.

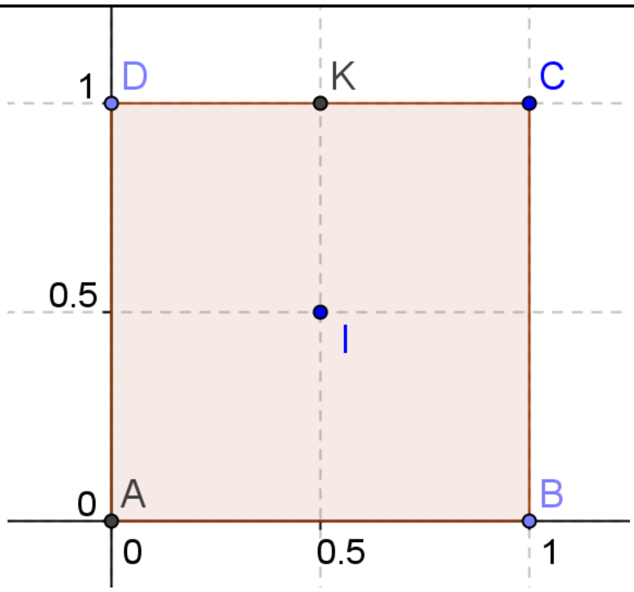
CORRECTION

Exercice 3 : /5

Dans le plan orienté on considère un carré ABCD tel que l'angle $(\overrightarrow{AB}\ ;\overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}$. On désigne par I et K les milieux respectifs des segments [AC] et [CD]. Représenter ces points sur une figure.
On se propose d'étudier la similitude directe S telle que S(A) = I et S(C) = K.

Le plan est rapporté au repère orthonormal direct $(A\ ;\overrightarrow{AB}\ ;\overrightarrow{AD})$.

1) Donner les affixes des points A, C, I et K.
2) Montrer que l'écriture complexe de S est $z' = \frac{1+i}{4}z + \frac{1+i}{2}$.
3) Déterminer les éléments caractéristiques de S (centre Ω, rapport et angle).
4) Que peut-on dire des triangles AΩI et CΩK ?



1) $z_A = 0$ $z_C = 1 + i$ $z_I = \frac{1+i}{2}$ $z_K = \frac{1}{2} + i$

2) L'écriture complexe de S est de la forme $z' = az + b$

Les égalités S(A) = I et S(C) = K conduisent au système :

$$\begin{cases} b = \frac{1+i}{2} \\ a(1+i) + b = \frac{1}{2} + i \end{cases}$$

On en déduit $a = \dfrac{\frac{1}{2} + i - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i}{1+i} = \dfrac{i}{2(1+i)} = \dfrac{i(1-i)}{4} = \dfrac{1+i}{4}$

L'écriture complexe de S est donc $z' = \frac{1+i}{4}z + \frac{1+i}{2}$

3) L'affixe du centre Ω vérifie $z' = z$ soit : $z = \frac{1+i}{4}z + \frac{1+i}{2}$

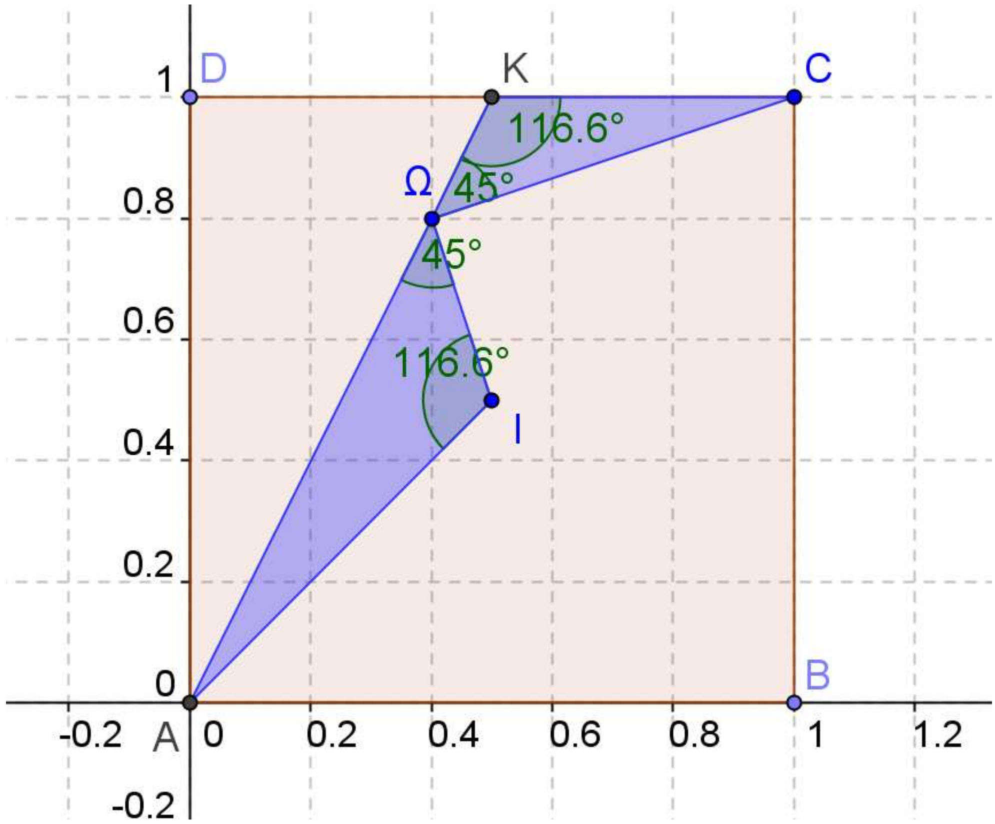
$4z = (1+i)z + 2(1+i) \Rightarrow (3-i)z = 2(1+i) \Rightarrow z = 2\times\frac{1+i}{3-i} = 2\times\frac{(1+i)(3+i)}{10} = \frac{2}{5} + \frac{4}{5}i$

CORRECTION

L'affixe du centre Ω est donc $\frac{2}{5} + \frac{4}{5}i$.

Le rapport de S est $\left|\frac{1+i}{4}\right| = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

L'angle de S est $\arg\left(\frac{1+i}{4}\right) = \arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$.



Les triangles AΩI et CΩK sont semblables.

CORRECTION

Exercice 1 : /3

S est la transformation du plan d'écriture complexe z' = 3iz - 4. Soit A, B et C les points d'affixe respectives i, 2 et 1 – i.

1) Déterminer les affixes des points A', B' et C' images de A, B et C par S.
2) Déterminer l'affixe du point D tel que S(D) = A.
3) Démontrer que $\frac{A'B'}{A'C'} = \frac{AB}{AC}$.
4) Calculer les angles $(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{A'B'})$ et $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{A'C'})$. Que remarque-t-on ?

1) $z_{A'} = 3i \times i - 4 = -3 - 4 = -7$
   $z_{B'} = 3i \times 2 - 4 = -4 + 6i$
   $z_{C'} = 3i(1 - i) - 4 = 3i - 3i^2 - 4 = -1 + 3i$
2) On résout l'équation $z' = z_A$

   Soit : $3iz - 4 = i \Rightarrow 3iz = i + 4 \Rightarrow z = \frac{i + 4}{3i} = \frac{-1 + 4i}{-3} = \frac{1}{3} - \frac{4}{3}i$

   D a pour affixe $\frac{1}{3} - \frac{4}{3}i$.
3) $A'B' = |z_{B'} - z_{A'}| = |-4 + 6i + 7| = |3 + 6i| = \sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$
   $A'C' = |z_{C'} - z_{A'}| = |-1 + 3i + 7| = |6 + 3i| = \sqrt{6^2 + 3^2} = 3\sqrt{5}$
   $AB = |z_B - z_A| = |2 - i| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$
   $AC = |z_C - z_A| = |1 - i - i| = |1 - 2i| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$

   On vérifie que $\frac{A'B'}{A'C'} = \frac{AB}{AC} = 1$.
4) $(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{A'B'}) = \arg\left(\frac{z_{B'} - z_{A'}}{z_B - z_A}\right)$

   $\frac{z_{B'} - z_{A'}}{z_B - z_A} = \frac{3 + 6i}{2 - i} = 3\frac{1 + 2i}{2 - i} = 3\frac{(1 + 2i)(2 + i)}{5} = \frac{3}{5}(2 + i + 4i - 2) = 3i$

   $\arg(3i) = \frac{\pi}{2}$

   Donc $(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{A'B'}) = \frac{\pi}{2}$

   $(\overrightarrow{AC} ; \overrightarrow{A'C'}) = \arg\left(\frac{z_{C'} - z_{A'}}{z_C - z_A}\right)$

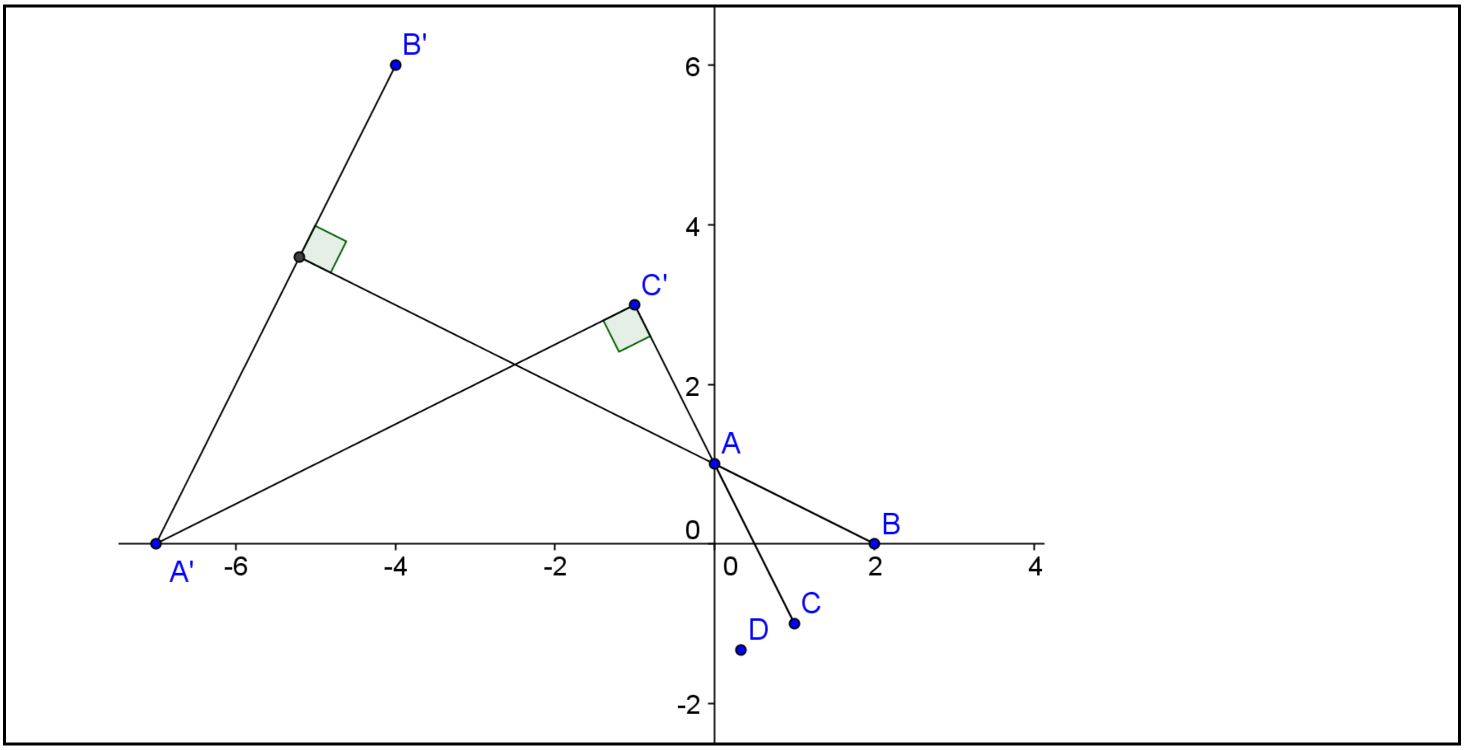
   $\frac{z_{C'} - z_{A'}}{z_C - z_A} = \frac{6 + 3i}{1 - 2i} = 3\frac{2 + i}{1 - 2i} = 3\frac{(2 + i)(1 + 2i)}{5} = \frac{3}{5}(2 + 4i + i - 2) = 3i$

   $\arg(3i) = \frac{\pi}{2}$

   Donc $(\overrightarrow{AC} ; \overrightarrow{A'C'}) = \frac{\pi}{2}$

   On remarque que $(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{A'B'}) = (\overrightarrow{AC} ; \overrightarrow{A'C'})$.

CORRECTION



Exercice 2 : /2

A et B sont deux points du plan.

$\mathcal{D}$ est une droite du plan, s est la symétrie axiale d'axe $\mathcal{D}$, t est la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$, h est l'homothétie de centre A et de rapport -4.

r est la rotation de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

Justifier que les composées suivantes sont des similitudes et préciser leur rapport :

a) $s_1 = s \circ r$;
b) $s_2 = h \circ h$
c) $s_3 = r \circ h^{-1} \circ s$;
d) $s_4 = t \circ r$.

a) s_1 est une composée de similitudes de rapports respectifs 1 et 1, donc s_1 est une similitude de rapport $1\times1 = 1$.

b) s_2 est une composée de similitudes de rapports respectifs 4 et 4, donc s_2 est une similitude de rapport $4\times4 = 16$.

c) s_3 est une composée de similitudes de rapports respectifs 1, $\frac{1}{4}$ et 1, donc s_3 est une similitude de rapport $1\times\frac{1}{4}\times1 = \frac{1}{4}$.

d) s_4 est une composée de similitudes de rapports respectifs 1 et 1, donc s_4 est une similitude de rapport $1\times1 =1$.

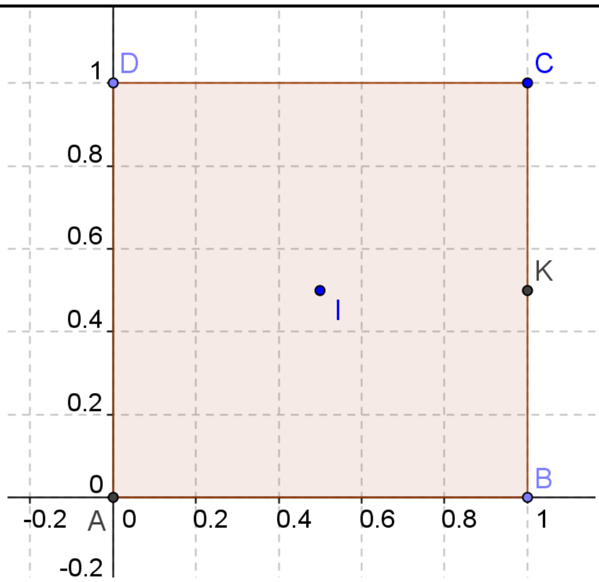
CORRECTION

Exercice 3 : /5

Dans le plan orienté on considère un carré ABCD tel que l'angle $(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}$. On désigne par I et K les milieux respectifs des segments [AC] et [BC]. Représenter ces points sur une figure.
On se propose d'étudier la similitude directe S telle que S(A) = I et S(C) = K.

Le plan est rapporté au repère orthonormal direct $(A\,;\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD})$.

1) Donner les affixes des points A, C, I et K.
2) Montrer que l'écriture complexe de S est $z' = \frac{1+i}{4}z + \frac{1+i}{2}$
3) Déterminer les éléments caractéristiques de S (centre Ω, rapport et angle).
4) Que peut-on dire des triangles AΩI et CΩK ?



1) $z_A = 0$ $z_C = 1 + i$ $z_I = \frac{1+i}{2}$ $z_K = 1 + \frac{1}{2}i$

2) L'écriture complexe de S est de la forme $z' = az + b$
Les égalités S(A) = I et S(C) = K conduisent au système :

$$\begin{cases} b = \frac{1+i}{2} \\ a(1+i) + b = 1 + \frac{1}{2}i \end{cases}$$

On en déduit $a = \dfrac{1 + \frac{1}{2}i - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i}{1+i} = \dfrac{1}{2(1+i)} = \dfrac{1-i}{4} = \dfrac{1-i}{4}$

L'écriture complexe de S est donc bien : $z' = \frac{1-i}{4}z + \frac{1+i}{2}$

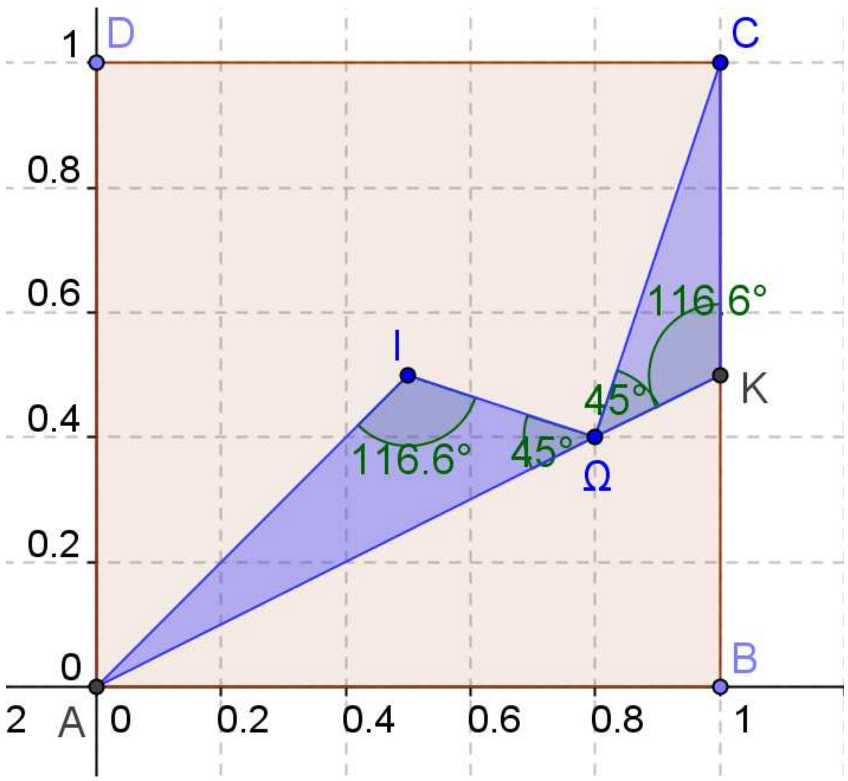
3) L'affixe du centre Ω vérifie $z' = z$ soit : $z = \frac{1-i}{4}z + \frac{1+i}{2}$

$4z = (1-i)z + 2(1+i) \Rightarrow (3+i)z = 2(1+i) \Rightarrow z = 2\times\frac{1+i}{3+i} = 2\times\frac{(1+i)(3-i)}{10} = \frac{4}{5} + \frac{2}{5}i$

L'affixe du centre Ω est donc $\frac{4}{5} + \frac{2}{5}i$.

Le rapport de S est $\left|\frac{1 + i}{4}\right| = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

L'angle de S est $\arg\left(\frac{1 - i}{4}\right) = \arg(1 - i) = \frac{7\pi}{4}.[2\pi]$



Les triangles AΩI et CΩK sont semblables.