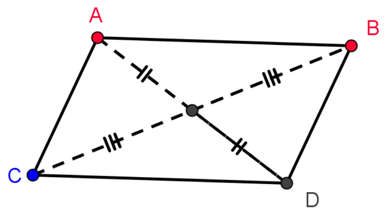
Seconde **Géométrie vectorielle**

I. Notion de vecteurs

a) Vecteurs et translations

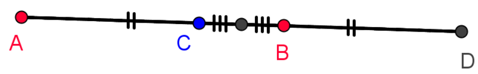
Définition :
A et B désignent deux points du plan.
La **translation qui transforme A en B** associe à tout point C du plan l'unique point D tel que les segments [BC] et [AD] ont le même milieu.

1er cas : $C \in (AB)$



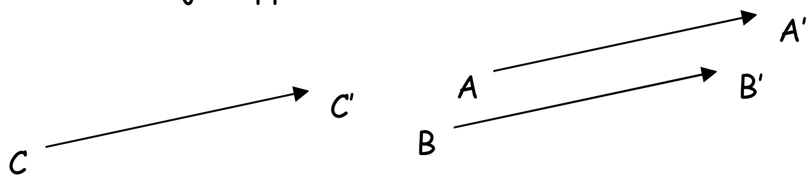
D est le point tel que ABDC est un parallélogramme.

2ème cas : $C \in (AB)$



On dit que ABDC est un parallélogramme aplati.

Définition :
Si une translation transforme A en A', B en B', C en C', on dit que les couples (A,A'), (B,B'), (C,C') définissent un même objet appelé **vecteur**.

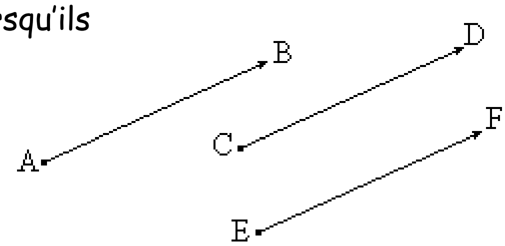


Le vecteur $\overrightarrow{AA'}$ est défini :
- par sa direction (celle de la droite (AA'))
- par sa longueur (la longueur AA')
- par son sens (de A vers A')

Remarque : A chaque translation correspond un vecteur qu'on appelle vecteur de la translation. ($\overrightarrow{AA'}$ pour la translation précédente)

b) égalité de vecteurs

Définition : On dit que deux vecteurs sont **égaux** lorsqu'ils ont même direction, même sens et même longueur.



On note $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$

On dit que $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$ sont des représentants d'un même vecteur.

Vecteurs particuliers :

- Le vecteur **nul** $\vec{0}$: pour tout point M, $\overrightarrow{MM} = \vec{0}$
- Le vecteur **opposé** à $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur qui a la même direction, la même longueur

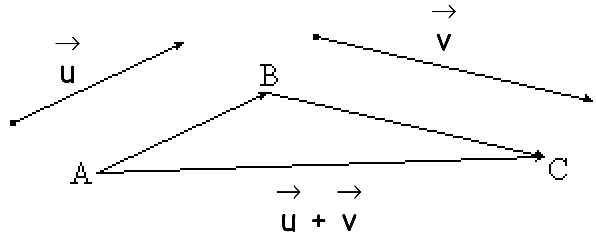
que $\overrightarrow{AB}$ mais un sens opposé. C'est donc le vecteur $\overrightarrow{BA}$.

On note : $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$

Propriété :

Dire que quatre points A, B, C et D sont tels que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ équivaut à dire que ABCD est un parallélogramme, éventuellement aplati.

c) somme et différence de vecteurs



Définition : La **somme** de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$

est le vecteur, noté $\vec{u} + \vec{v}$, défini ainsi :
A étant un point quelconque, on place le point B tel

que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, puis le point C tel que $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$; alors $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

L'égalité $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ est appelée **relation de Chasles**.

Remarque : si $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{ON}$,

alors $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{OR}$ où OMRN est un parallélogramme.

On en déduit la règle du parallélogramme :
A, B et C étant donnés,
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ équivaut à ABDC est un parallélogramme.

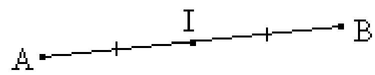
Définition : La différence du vecteur $\vec{u}$ et du vecteur $\vec{v}$ s'obtient en ajoutant au

vecteur $\vec{u}$ l'opposé du vecteur $\vec{v}$:

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$$

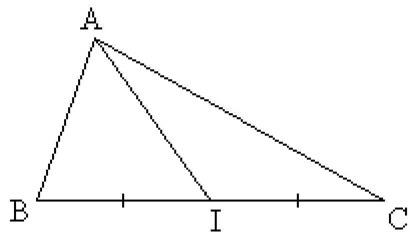
Milieu d'un segment :

Le milieu de [AB] est le point I tel que : $\overrightarrow{AB} = 2\,\overrightarrow{AI}$ ou $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.



Autres traductions : $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$; $\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$; $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BI} = \vec{0}$.

Exercice :



1. Démontrer que pour tous points O, A et B, $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB}$
2. A, B et C sont trois points ; I est le milieu de [BC].

Démontrer que $2\,\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

Solution :

1. $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AB}$ d'après la relation de Chasles.
2. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC}$ d'après la relation de Chasles

$= 2\,\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}$

Or I est le milieu de [BC], d'où $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$

Donc on a bien $2\,\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

II Multiplication d'un vecteur par un réel

a) Définition

$\vec{u}$ désigne un vecteur non nul et k un nombre réel non nul.

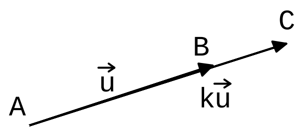
Le **produit du vecteur $\vec{u}$ par le réel k** est le vecteur $k\vec{u}$ tel que :

• $k\vec{u}$ et $\vec{u}$ ont même direction

Lorsque $k > 0$

• $k\vec{u}$ a le même sens que $\vec{u}$

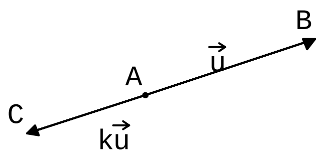
• la longueur de $k\vec{u}$ est le produit de k par la longueur de $\vec{u}$.



Lorsque $k < 0$

• $k\vec{u}$ est de sens opposé à celui de $\vec{u}$

• la longueur de $k\vec{u}$ est le produit de l'opposé de k par la longueur de $\vec{u}$.

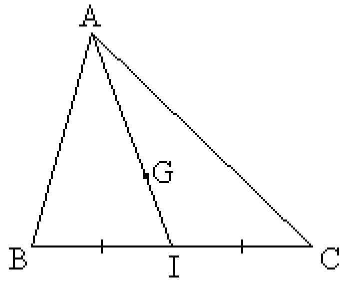


Exemples :

- centre de gravité d'un triangle :

Le centre de gravité du triangle ABC est le point G tel que

$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$ ou $\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GI}$, lorsque I est le milieu de [BC]



(c'est à dire que (AI) est la médiane issue de A).

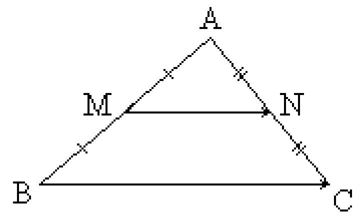
Autres traductions : $\overrightarrow{IG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IA}$; $\overrightarrow{GI} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GA}$.

- le théorème des milieux

ABC est un triangle.

Si M est le milieu de [AB] et N celui de [AC] alors

$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.



En effet : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN}$ d'après la relation de Chasles

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ car M est le milieu de [AB] et N celui de [AC]

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ d'après la relation de Chasles

b) règles de calcul

Propriétés :

- $k\vec{u} = \vec{0}$ équivaut à $k = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$
- Pour tous réels k, k' et tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$:

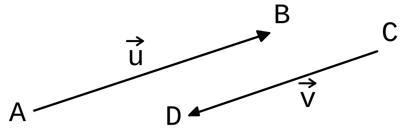
$k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$	$k(k'\vec{u}) = (kk')\vec{u}$
$(k + k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$	$1 . \vec{u} = \vec{u}$

Exemples :

- $2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AB} = (2+3)\overrightarrow{AB} = 5\overrightarrow{AB}$
- $-3 \times \left(\frac{2}{3}\vec{u}\right) = \left(-3 \times \frac{2}{3}\right)\vec{u} = -2\vec{u}$
- $3\overrightarrow{AM} = \vec{0}$ équivaut à $\overrightarrow{AM} = \vec{0}$, c'est à dire A = M.

III Colinéarité de deux vecteurs

a) vecteurs colinéaires



Définition : Dire que deux vecteurs non nuls $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$ sont **colinéaires** signifie qu'ils ont la même direction.

Cela signifie que les droites (AB) et (CD) sont parallèles ou confondues.

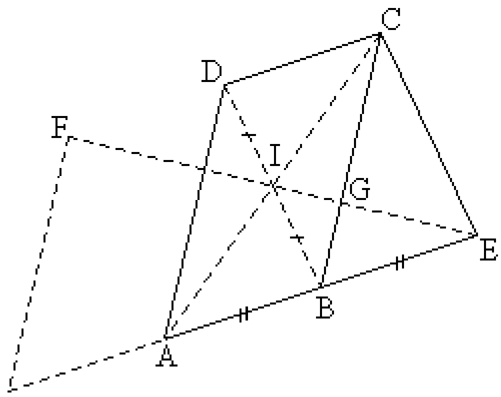
Propriété : Dire que les vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires équivaut à dire qu'il existe un nombre réel k non nul tel que $\vec{v} = k\,\vec{u}$.

Remarque : Par convention, on dit que le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur $\vec{u}$.

b) parallélisme et alignement

- Dire que les droites (AB) et (CD) sont **parallèles** équivaut à dire qu'il existe un nombre réel k non nul tel que $\overrightarrow{CD} = k\,\overrightarrow{AB}$.
- Dire que les points distincts A, B et C sont **alignés** équivaut à dire qu'il existe un nombre réel k non nul tel que $\overrightarrow{AB} = k\,\overrightarrow{AC}$.

Exercice 1 :



Dans la figure ci-contre :
ABCD est un parallélogramme de centre I,
B est le milieu du segment [AE],
G est le centre de gravité du triangle ACE, et
$\overrightarrow{BF} = 2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}$.

Déterminer les relations reliant $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{CG}$ et $\overrightarrow{CB}$, puis $\overrightarrow{EI}$ et $\overrightarrow{EG}$.

Calculer $\overrightarrow{IE} + \overrightarrow{IF}$, puis montrer que E, G et F sont alignés.

Solution :

$\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB}$ car B est le milieu de [AE]

$= 2\overrightarrow{DC} = -2\overrightarrow{CD}$ car ABCD est un parallélogramme.

$\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$ car G est le centre de gravité du triangle ACE.

$\overrightarrow{EG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{EI}$ car G est le centre de gravité du triangle ACE, donc $\overrightarrow{EI} = \frac{3}{2}\overrightarrow{EG}$.

$\overrightarrow{IE} + \overrightarrow{IF} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BF}$ d'après la relation de Chasles

$= 2\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BE} + 2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}$

$= 2(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BA}) + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ ($\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB}$ car B est le milieu de [AE])

$= 2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AC}$ ($\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ car ABCD est un parallélogramme)

$= \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{0}$ ($2\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{CA}$ car I est le milieu de [AC])

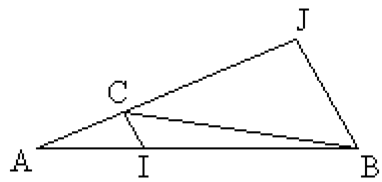
On en déduit que I est le milieu de [EF].

On a alors $\overrightarrow{EF} = 2\overrightarrow{EI}$ et de plus $\overrightarrow{EI} = \frac{3}{2}\overrightarrow{EG}$ donc $\overrightarrow{EF} = 3\overrightarrow{EG}$ et les points E, F et G sont alignés.

Exercice 2 :

ABC est un triangle, les points I et J sont tels que

$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AJ} = 3\overrightarrow{AC}$



1. Exprimer $\overrightarrow{IC}$ et $\overrightarrow{BJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

2. En déduire que les droites (IC) et (BJ) sont parallèles.

Solution :

1. $\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AC}$ d'après la relation de Chasles

$= -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AJ}$ d'après la relation de Chasles

$\overrightarrow{BJ} = -\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$

2. D'après les égalités précédentes, on obtient : $\overrightarrow{BJ} = 3\overrightarrow{IC}$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{BJ}$ et $\overrightarrow{IC}$ sont colinéaires et les droites (BJ) et (IC) sont parallèles.