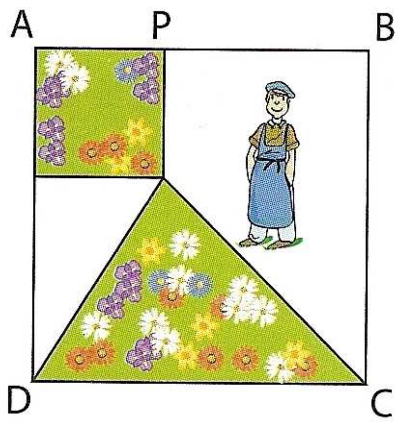
Fonction polynôme de degré 2 : Aire d'un jardin



Une entreprise paysagiste doit créer un espace « jardin et terrasse » sur un terrain ABCD de forme carrée de côté 8 m.
Le projet présenté aux clients, modifiable à souhait, est schématisé par la figure ci-contre. La partie jardin est colorée en vert (carré et triangle ayant un sommet commun). La terrasse occupe le reste du terrain. Le point P peut occuper n'importe quelle position sur le segment [AB].
Au cours des échanges entre le client et le paysagiste, diverses questions sont posées.

(1) Est-il possible que l'aire du jardin soit égale à la moitié de l'aire de celle du terrain ?
(2) Est-il possible que l'aire du jardin soit égale au quart de l'aire du terrain ?
(3) Est-il possible de faire en sorte que l'aire du jardin soit minimale ?

1) Expérimentation

a) Réaliser la figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.
b) Expérimenter à l'aide du logiciel et émettre des conjectures sur les questions posées.

2) Modélisation mathématique

a) On note x la longueur AP en mètres.
Exprimer l'aire du jardin en fonction de x.

b) Parmi les expressions suivantes, reconnaître celles qui donnent aussi l'aire du jardin :
- $x^2 - 4x + 32$
- $x^2 - 8x + 64$
- $(x - 2)^2 + 28$
- $x(x + 4)$

c) Utiliser la forme la plus adaptée pour répondre à chaque question (1), (2) et (3).
Les réponses sont-elles conformes aux conjectures émises ?

Fonction polynôme de degré 2 : Aire d'un jardin

CORRECTION

1) Expérimentation

b)

(1) Il semble que l'aire du jardin est égale à la moitié de l'aire du terrain pour AP = 0 ou AP = 4 m.

(2) Il semble qu'il ne soit pas possible que l'aire du jardin soit égale au quart à l'aire du terrain.

(3) Il semble que l'aire du jardin est minimale pour AP = 2 m.

2) Modélisation mathématique

a) $A(x) = AP^2 + \frac{DC \times h}{2}$

$A(x) = x^2 + \frac{8 \times (8 - x)}{2}$

$A(x) = x^2 + 4(8 - x) = x^2 - 4x + 32$

b) $(x - 2)^2 + 28 = x^2 - 4x + 4 + 28 = x^2 - 4x + 32$

2 expressions correspondent à l'aire du jardin :

- $x^2 - 4x + 32$: forme développé
- $(x - 2)^2 + 28$: forme canonique

c) La forme la plus adaptée pour répondre aux trois questions est la forme canonique.

(1) $A(x) = \frac{8 \times 8}{2}$ $\Leftrightarrow (x - 2)^2 + 28 = 32$

$\Leftrightarrow (x - 2)^2 = 32 - 28$

$\Leftrightarrow (x - 2)^2 = 2^2$

$\Leftrightarrow x - 2 = -2$ ou $x - 2 = 2$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 4$

Fonction polynôme de degré 2 : Aire d'un jardin

CORRECTION

$A(x) = \dfrac{8\times 8}{4}$ $\Leftrightarrow (x-2)^2 + 28 = 16$

$\Leftrightarrow (x-2)^2 = 16 - 28$

$\Leftrightarrow (x-2)^2 = -12$

Un carré ne peut pas être négatif.

Donc cette équation n' pas de solution.

(2) La fonction A est décroissante [0 ;2] et croissante sur [2 ;8].

Elle admet un minimum atteint en x = 2.

La valeur du minimum est 28 m².

<u>Tracé de la parabole représentant sur [0 ;8]</u> :