3$^{\text{ème}}$

Cours : Statistiques et probabilité

I Statistiques

a) Médiane d'une série statistique

Définition :

On appelle **médiane** d'une série statistique ordonnée une valeur du caractère qui partage la série en deux groupes de même effectif tels que :

- un groupe contient les valeurs inférieures ou égales à la médiane ;
- l'autre groupe contient les valeurs supérieures ou égales à la médiane.

Remarque :

- Dans le cas d'un effectif total N impaire, la médiane est la valeur de la série ordonnée de rang $\frac{N+1}{2}$.
- Dans le cas d'un effectif total N pair, aucune valeur de la série ordonnée ne partage la série en deux groupes de même effectif. Toute valeur comprise entre les valeurs de rang $\frac{N}{2}$ et $\frac{N}{2} + 1$ peut être prise comme médiane.
En général, on prend la moyenne de ces deux valeurs.

Exemples :

- Voici les notes obtenues au premier trimestre par un élève :
13 ;7 ;11 ;15 ;14 ;6 ;10 ;8 ;16 ;15.

On ordonne la série des 11 notes, 11 étant impair, la médiane correspond à la valeur de rang $\frac{11+1}{2}$, soit au 6$^{\text{ème}}$ rang de la série ordonnée.

$$\underbrace{6 \quad 7 \quad 8 \quad 10 \quad 11}_{\text{5 notes}} \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{médiane}}}{13} \quad \underbrace{14 \quad 15 \quad 15 \quad 15 \quad 16}_{\text{5 notes}}$$

- Voici la série ordonnée des notes obtenues au deuxième trimestre :
6 ;7 ;8 ;8 ;11 ;12 ;12 ;13 ;15 ;15

L'effectif total N est pair (N = 10) donc toute valeur comprise entre les rangs $\frac{N}{2}$ et $\frac{N}{2} + 1$, soit la 5$^{\text{ème}}$ et 6$^{\text{ème}}$ valeur, peut être prise comme médiane. On choisit la moyenne des deux valeurs, soit 11,5.

b) Quartiles

Définition :

On appelle premier quartile la plus petite valeur q1 de la série ordonnée telle que 25 % des valeurs soient inférieures ou égales à q1.
On appelle troisième quartile la plus petite valeur q3 de la série ordonnée telle que 75 % des valeurs soient inférieures ou égales à q3.

Remarques :
- Le 2ème quartile q_2 est la médiane de la série.
- Les premier et troisième quartiles correspondent aux médianes des deux demi-séries déterminées par la médiane.

Exemples :

- Cas d'un effectif total faible :
Soit une série ordonnée de 15 valeurs : 5 ;7 ;7 ;8 ;9 ;9 ;10 ;11 ;11 ;11 ;12 ;13 ;13 ;14 ;16.
L'effectif total étant impair, la médiane est la valeur de rang $\frac{15+1}{2}$, c'est-à-dire la 8e note.
Donc la médiane est 11.
Le premier quartile partage les 7 premières notes en deux groupes de même effectif, donc le premier quartile est $q_1 = 8$, la 4e valeur de la série.
Le troisième quartile partage de la même façon les 7 autre notes, donc le troisième quartile est $q_3 = 13$.

- Cas d'un effectif total important :
La médecine du travail a relevé le « poids » (la masse) des 160 employés hommes d'une entreprise.

Masse en kg	57	61	63	64	65	67	68	69	70	72	73	76	78	81	86	92
Effectif	1	3	7	9	18	16	15	17	23	13	8	9	7	5	7	2
Effectif cumulé	1	4	11	20	38	54	69	86	109	122	130	139	146	151	158	160

L'effectif total de la série est 160, un nombre pair. La médiane est donc la moyenne des valeurs des rangs $\frac{N}{2}$ et $\frac{N}{2} + 1$, 80e et 81e valeurs. On observe à partir des effectifs cumulés que ces deux valeurs sont 69.La médiane de cette série est donc 69.

25% des valeurs correspondent à $160 \times 0,25 = 40$. Donc le 1er quartile est la 40e valeur, c'est-à-dire 67.

75% des valeurs correspondent à $160 \times 0,75 = 120$. Donc le 3e quartile est la 120e valeur, c'est-à-dire 72.

Propriété :
Environ 50% des valeurs d'une série ordonnée sont comprises entre les quartiles q_1 et q_3.

c) Etendue d'une série statistique

Définition :
L'**étendue** d'une série statistique est la différence entre la plus grande valeur et la plus petite valeur de la série.

Propriété :
L'étendue est un **paramètre de dispersion** : moins l'étendue d'une série statistique est grande, moins les valeurs sont dispersées.
Elles sont alors regroupées autour de la moyenne et de la médiane (qui sont des **paramètres de position**).

Cours : Statistiques et probabilité

Exemple :

Les élèves d'une classe ont effectué deux devoirs dont les notes ordonnées sont les suivantes :
Devoir 1 : 1 ;4 ;5 ;5 ;6 ;8 ;9 ;11 ;11 ;11 ;12 ;12 ;15 ;15 ;16 ;19.
Devoir 2 : 4 ;5 ;6 ;6 ;6 ;7 ;9 ;10 ;12 ;12 ;13 ;13 ;13 ;13 ;14 ;15 ;15.
Ces deux séries ont la même moyenne 10 et la même médiane 11, cependant elles n'ont pas le même « profil ».
En effet, l'étendue des notes du devoir 1 est : 19 – 1 = 18, alors que celle du devoir 2 est : 15 – 4 = 11.
Donc les notes du devoir 2 sont moins dispersées que les notes du devoir 1.

II Probabilités

a) Vocabulaire

Définitions :

- Un phénomène dont on ne peut pas prévoir de façon certaine le résultat, ou l'**issue**, s'appelle une **expérience aléatoire**.
- Les résultats ou issues possibles d'une expérience aléatoire sont appelées **éventualités**.
- Un **évènement** est un ensemble d'éventualités. Un événement est réalisé lorsque l'une des éventualités qui le compose est réalisée.
- Une éventualité est un **événement élémentaire**.

Exemple :
« Jeter un dé » est une expérience aléatoire. On ne peut pas savoir le numéro de la face supérieure qui va apparaître, les issues possibles sont 1 ;2 ;3 ;4 ;5 ;6.
Les éventualités sont 1 ;2 ;3 ;4 ;5 ;6.
On peut définir l'événement M : « obtenir un multiple de 3 ».
L'événement M est constitué des éventualités 3 et 6.

Définition :
Si A désigne un événement, on appelle « non A » ou $\overline{A}$ (on lit « A barre ») l'**événement contraire** de A, c'est-à-dire l'événement qui se réalise lorsque A ne se réalise pas.

Exemple :
Soit M l'événement : « obtenir un multiple de 3 » dans un jeu de dé.
L'événement contraire de M est $\overline{M}$ l'événement « ne pas obtenir un multiple de 3 ».

b) Probabilité

Définition :
Quand une expérience est répétée un grand nombre de fois, la fréquence relative de réalisation d'un événement élémentaire se rapproche d'une valeur particulière : la **probabilité** de cet événement élémentaire.

Cours : Statistiques et probabilité

Exemples :

- La probabilité d'obtenir « pile » lors du jet d'une pièce est égale à $\frac{1}{2}$ ou 0,5.

- Dans un collège, on a interrogé les élèves sur le nombre d'enfants dans leur famille.

Nombre	1	2	3	4	5	6 et plus
Effectif	18	25	20	11	5	3
Fréquence	21,95%	30,49%	24,39%	13,41%	6,10%	3,66%

On choisit un élève au hasard dans le collège.
La probabilité pour que cet élève appartienne à une famille de trois enfants est approchée par la fréquence correspondante, soit $\frac{24{,}39}{100}$ ou 0,2439.

Propriétés :

- La probabilité d'un événement est égale à la somme des probabilités des éventualités qui la composent.
- La probabilité d'un événement qui se produit nécessairement (événement certain) est égale à 1.
- La probabilité d'un événement qui ne peut pas se produire (événement impossible) est égale à 0.
- Quel que soit l'événement A, on a : $0 \leq p(A) \leq 1$.
- La somme des probabilités des événements élémentaires est égale à 1.

Exemple :

Dans l'expérience du jeu de dé à 6 faces, on appelle :
A l'événement élémentaire : « obtenir un 1 »
B l'événement élémentaire : « obtenir un 2 »
C l'événement élémentaire : « obtenir un 3 »
D l'événement élémentaire : « obtenir un 4 »
E l'événement élémentaire : « obtenir un 5 »
F l'événement élémentaire : « obtenir un 6 »

- Chaque face a la même chance d'apparition, donc :
  $p(A) = p(B) = p(C) = p(D) = p(E) = p(F) = \frac{1}{6}$.
- On a : $p(A) + p(B) + p(C) + p(D) + p(E) + p(F) = 6\times\frac{1}{6} = 1$
- Soit l'événement M "obtenir un multiple de 3". L'événement M est réalisé si la face obtenue est 3 ou 6.
  On a alors : $p(M) = p(C) + p(F) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$.

Définition :
Si tous les événements élémentaires ou éventualités d'une expérience aléatoire ont la même probabilité, on dit que les événements élémentaires sont **équiprobables** ou qu'il y a **équiprobabilité**.

Propriété :
Dans une situation d'équiprobabilité, la probabilité d'un événement A est égale au quotient du nombre de cas favorables par le nombre de cas possibles.

Cours : Statistiques et probabilité

Exemple :
Soit l'événement M « obtenir un multiple de 3 » dans un jeu de dé.
- Toutes les faces ayant la même chance d'apparition, il y a équiprobabilité.
- L'événement M est constitué de deux événements élémentaires, il y a 2 cas favorables pour réaliser M sur 6 cas possibles. Donc p(M) = $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Propriété :

La probabilité de $\overline{A}$, l'événement contraire de A, est le complément à 1 de la probabilité de A.

On a : p($\overline{A}$) = 1 – p(A).

Exemple :
Soit l'événement M « obtenir un multiple de 3 » dans un jeu de dé.
L'événement $\overline{M}$ est : « ne pas obtenir un multiple de 3 » ou encore « obtenir 1, 2, 4 ou 5 ».

Pour réaliser l'événement $\overline{M}$, il y a 4 cas favorables équiprobables, donc p($\overline{M}$) = $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

On a aussi p($\overline{M}$) = 1 – p(M), donc p($\overline{M}$) = 1 – $\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.